О т з ы в

официального оппонента о диссертации Коваль Карины Александровны «Операторный подход к краевым, спектральным и начально-краевым задачам сопряжения», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Краевые и спектральные задачи, возникающие в реальных приложениях, далеко не всегда укладываются в стандартную классификацию теории уравнений в частных производных; на практике приходится иметь дело со случаями, когда на разных частях границы поставлены краевые условия разного рода (и соответственно, нужно следить за согласованием граничных функций на стыках этих частей), со случаями, когда сама область (имеющая сложную форму и негладкую границу) представляет собой объединение подобластей и ставятся условия на поведение решения на их стыках, и с другими разнообразными нестандартными постановками задачи. Такова, например, задача Стеклова (возникающая в гидродинамике) — ограниченная область разделена на две части, на границе области решение обращается в нуль, а на стыке (поверхность, разделяющая область на две части) поставлены следующие условия на следы (с одной и с другой стороны от стыка) решения и его нормальной производной: разность следов самого решения равна заданной функции, а разность следов производной обращается в нуль. Если, наоборот, на стыке задать разность следов нормальной производной, а разность следов самого решения положить равной нулю, то получим задачу Крейна, возникающую при описании колебаний тяжелой жидкости в частично заполненном сосуде. Еще один пример — возникающие в математических моделях дифракции задачи со спектральным условием Аграновича, в котором спектральный параметр возникает не в уравнении, а в граничном условии, связывая между собой след решения и его нормальной производной.

Разумеется, эти три задачи хорошо исследованы, однако отнюдь не в рамках какого-либо единого подхода, а именно как три отдельные задачи математической физики. Поэтому, изучая любое существенное обобщение любой из них (а уж тем более — любую новую неклассическую задачу), придется начинать исследование с самого начала. Однако в последние годы усилиями научной школы Н. Д. Копачевского создается и единый подход, позволяющий применять универсальные методы для исследования широкого класса неклассических задач в сложных составных областях с негладкими границами. Он называется *теорией задач сопряжения*, и рецензируемая диссертационная работа вносит достойный и весомый вклад в развитие этой теории.

Применяя технику обобщенных формул Грина и теорию операторных пучков Крейна, диссертанту удалось добиться следующих результатов.

1. Для эллиптических задач найдены критерии однозначной разрешимости. Построена соответствующая шкала функциональных пространств, и указанные критерии сформулированы в терминах принадлежности этим пространствам неоднородностей задачи, т. е. правой части уравнения и следов решения и его производных на границе области, ее частях и стыках подобластей.

2. Для спектральных задач найдены условия, гарантирующие дискретность спектра, положительность и конечнократность собственных значений, базисность по Риссу (полноту по Абелю—Лидскому) системы собственных (корневых) функций либо их проекций на соответствующие подпространства.

3. Для нестационарных задач найдены условия (на неоднородности задачи и параметры порождающей спектральной задачи), гарантирующие *сильную* однозначную разрешимость.

Следует отметить два обстоятельства, существенно повышающие ценность указанных результатов. Во-первых, с самого начала предполагается, что граница области всего лишь липшицева, и это требование сохраняется (не усиливается) на протяжении всего исследования. Таким образом, полностью устранено то неудобство, часто возникающее в теории краевых задач, когда вначале результат доказывается для случая гладкой границы, а затем приходится тщательно исследовать, насколько можно (и можно ли вообще) это требование гладкости ослабить. Во-вторых, все результаты доказаны, вообще говоря, не для дифференциальных операторов, а для операторов более общей природы. Конечно, далеко не каждый оператор удовлетворяет условиям каждой конкретной теоремы диссертации, но проверка того, можно ее применить к нему или нет, производится средствами функционального анализа, а не теории уравнений в частных производных. В данном контексте это — большое преимущество: если посмотреть на многообразие областей и уравнений, охватываемых данной теорией, с точки зрения теории дифференциальных уравнений, то увидим совершенно бессистемную картину, а вот в рамках предлагаемого функционально-аналитического подхода получаем стройную и достаточно простую классификацию. Бесспорно, на полноту и она претендовать не может (и никаких подобных претензий в диссертации не содержится), но ею покрывается весьма широкий и существенный круг задач: сюда входят и задачи с классическими условиями первого, второго и третьего рода, и три знаменитые задачи, приведенные в качестве примеров в начале отзыва, и их разнообразные обобщения, и многое другое.

В работе имеются и недостатки, а именно:

- Фраза «Обозначим через $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$, $|s| \leq 1$, множество (линеал), состоящее из (обобщенных) функций с носителем в $\overline{\Gamma_k}$» (стр. 26 диссертации), неверна — хотя бы потому, что при таком определении множество $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ никак не зависит от s. Разумеется, ее надо понимать в совокупности со следующей фразой, поэтому не надо было разбивать это определение на два предложения.

- Когда гармонические элементы определяются равенством $v - \Delta v = 0$ (а не $\Delta v = 0$), это может насторожить читателя. Поэтому, определяя таким образом подпространство гармонических элементов (стр. 27 диссертации), имело бы смысл указать, что оно введено в работе [22] (нумерация библиографии диссертации).

- Сам раздел «Основные обозначения и определения» (стр. 26–32 диссертации) имело бы смысл сделать несколько более обширным — по крайней мере, в нем нужно было бы указать, что символ $E^{-1/2}$, используемый на стр. 28 диссертации, обозначает пополнение пространства E по норме $\|A^{-1/2} \cdot\|_E$. Понятно, что диссертация — это специфический вид литературы, и ожидается, что его читают только специалисты в данной области, но все-таки это обозначение нельзя считать настолько общепринятым, чтобы оставить его без пояснений.

- На стр. 31 диссертации после формулы (50) надо заменить $[0, \infty]$ на $[0, \infty)$, а $t \leq 0$ — на $t \geq 0$.

- В формулировке теоремы 1.9 (стр. 54 диссертации) надо заменить (1.53) на (1.54).

- Двумя строками выше формулы (3.108) (стр. 137 диссертации) надо заменить (??)–(??) на (3.101)–(3.106).

Однако ни один из перечисленных недостатков (равно как и все они в совокупности) не снижает ценности полученных результатов и не меняет безусловно положительной оценки диссертации.

В целом рецензируемая диссертация представляет собой обширное научное исследование, важное для теории уравнений в частных производных и смежных областей анализа. Тема диссертации является актуальной, методы исследования — современными, результаты — новыми и существенными. Результаты диссертации своевременно опубликованы (в том числе — в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ) и многократно докладывались на международных научных конференциях и на научных семинарах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа К. А. Коваль «Операторный подход к краевым, спектральным и начально-краевым задачам сопряжения» полностью удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 (дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), а ее автор, Карина Александровна Коваль, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Доктор физико-математических наук А. Б. Муравник

19.04.2018

Официальный оппонент — Муравник Андрей Борисович,
доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, руководитель проекта службы информационных технологий АО «Концерн «Созвездие».
394018, Воронеж, ул. Плехановская, 14, АО «Концерн «Созвездие», служба информационных технологий.
e-mail: amuravnik@mail.ru, тел.: 89507781375

Подпись Муравника А. Б. заверяю:
Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор технических наук, профессор Н. Н. Толстых